IL MOTO DEI PIANETI INTORNO AL SOLE

Luciano Ancora

Il moto dei pianeti intorno al Sole

Luciano Ancora

La rivoluzione copernicana

Nella prima metà del XVI secolo, l'astronomo polacco Niccolò Copernico propose una sua teoria del moto dei pianeti su un sistema di orbite con il Sole al centro, opponendola alla concezione Tolemaica, che voleva invece la Terra al centro del sistema solare. L'idea non era del tutto nuova, già era stata espressa dai greci, ma Copernico ne diede una dimostrazione rigorosa, con procedimenti matematici. Tuttavia la sua teoria non era priva di difetti.

Copernico non sfruttò pienamente la sua idea di un sistema planetario centrato sul sole. Egli conservò, nella sua spiegazione matematica del nuovo sistema, una parte della concezione Tolemaica, per cui, oltre a considerare ancora orbite planetarie circolari, continuò a pensare che i piani orbitali dovessero intersecarsi nel centro dell'orbita terrestre.

Giovanni Keplero perfezionò il sistema matematico di Copernico, applicandovi rigorosamente la sua stessa teoria di un universo dominato dal Sole. Egli, assumendo che i piani delle orbite planetarie dovessero invece intersecarsi nel Sole, riuscì a trasformare il macchinoso sistema di Copernico in una tecnica estremamente semplice e precisa per calcolare la poszione dei pianeti.

Keplero, che aveva lavorato con Tycho Brahe, ebbe in eredità da costui una gran quantità dei più precisi dati mai raccolti sulle posizioni dei pianeti, e con questi si mise a studiare per dare una sistemazione alla teoria copernicana. Fu un lavoro enorme che occupò gran parte del tempo di Keplero per quasi dieci anni.

In una serie di tentativi senza successo, Keplero cercò di calcolare l'orbita del pianeta Marte e l'orbita della Terra, da cui Marte veniva osservato. Per fare questo, egli usò tutta una serie di combinazioni di circoli e figure ovali, ma nessuna di queste riuciva ad eliminare le discordanze fra la sua teoria sperimentale e le osservazioni. Poi, per caso, scoprì che teoria ed osservazioni potevano andare d'accordo se i pianeti si muovevano su orbite ellittiche, con velocità variabili secondo una semplice legge.

Keplero pensò che a spingere i pianeti lungo le loro orbite fosse una forza motrice, l'*anima motrix*, generata dal Sole, che doveva diminuire col crescere della distanza del pianeta dal Sole: ad una distanza doppia doveva corrispondere una forza dimezzata, e quindi una velocità orbitale inversamente proporzionale alla distanza dal Sole. Questa legge della velocità funzionava bene per piccole eccentricità, quali erano quelle delle orbite planetarie, e nell'approssimazione delle misure astronomiche

all'epoca di Keplero, quando i telescopi non esistevano ancora. Come vedremo, Isaac Newton formulò più tardi la legge esatta: quella della forza inversamente proporzionale al *quadrato* della distanza. (1)

L'impostazione di Keplero introduceva il concetto fisico di moti planetari regolati da forze, contro la concezione tradizionale dei moti "naturalmente" circolari. Occorreva quindi "spiegare" la natura delle forze di Keplero. Furono gli studi successivi svolti a tal fine, a condurre alla concezione newtoniana dell'universo, che diede alla rivoluzione copernicana il suo aspetto definitivo.

La sintesi Newtoniana

Nel 1674 Robert Hooke diede per primo una descrizione qualitativa dei fenomeni che regolano i moti celesti, postulando l'esistenza di due agenti fondamentali: l'*inerzia*, già introdotta da Descartes, che è la proprietà di un corpo di resistere ad una variazione del suo stato di moto, e la *forza di gravità* che è la forza di attrazione reciproca fra corpi qualsiasi.

Newton, che era già pervenuto da solo alla concezione qualitativa di Hooke, riuscì in seguito a risolvere quantitativamente i problema dei moti planetari, deducendo due conseguenze fisiche di estrema importanza. Se le velocità dei pianeti e i raggi delle loro orbite erano legati fra loro dalla terza legge di Keplero, allora l'attrazione che guidava i pianeti vero il Sole doveva diminuire in misura inversamente proporzionale al quadrato della distanza che li separava dal Sole. Inoltre, una legge quadratica di proporzionalità inversa poteva spiegare esattamente, sia le orbite ellitiche della prima legge di Keplero, sia la variazione di velocità descritta nella seconda legge.

Queste deduzioni matematiche, che non avevano precedenti nella storia delle scienze, saranno descritte dettagliatamente nel seguito.

La lezione perduta di Feynman

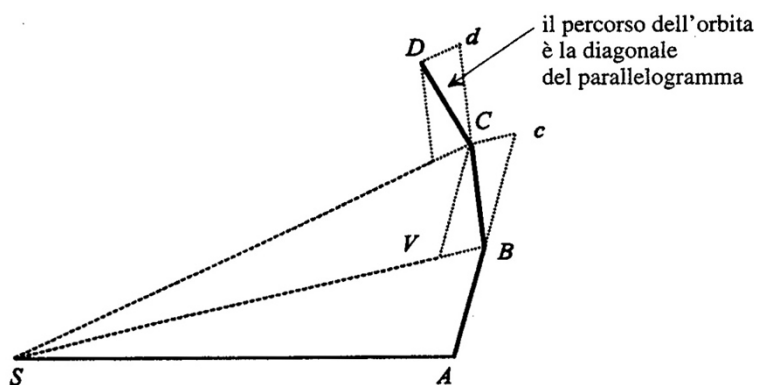
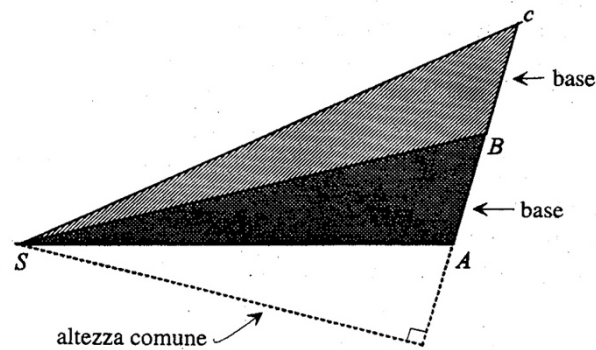
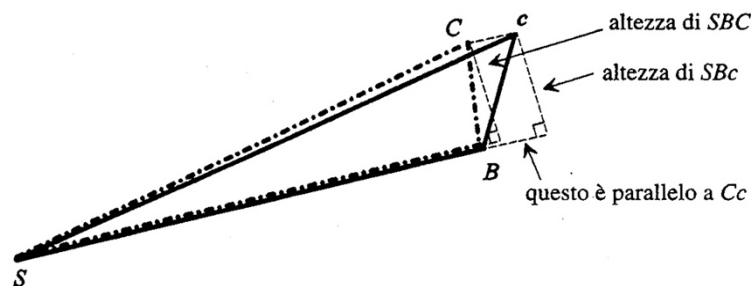
Questo paragrafo è una sintesi (in solo 7 pagine) del contenuto di un intero libro, di circa 200 pagine, su una lezione tenuta nel 1964 da Richard Feynman sull'argomento conclusivo del nostro articolo.

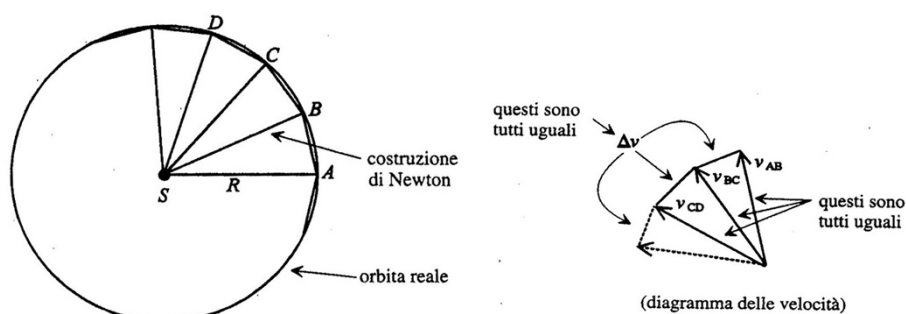
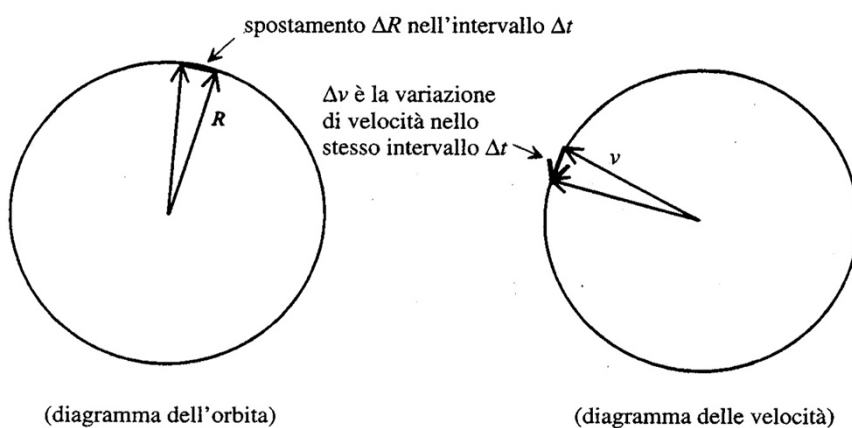
---

(1) Le due deduzioni quantitative viste in questo paragrafo si spiegano facilmente. Keplero deve aver considerato l'azione del Sole limitatamente al piano orbitale, con l'influenza distribuita uniformemente (per unità di lunghezza) su circonferenze concentrche centrate sul Sole, per cui, raddoppiando il raggio l'azione risulterebbe dimezzata. Newton considera invece un'azione distribuita uniformemente su superfici sferiche concentriche centrate sul Sole: su una sfera di raggio doppio, con superfice quadrupla, l'influenza unitaria si ridurrebbe a un quarto.

Prima di proseguire, ricordiamo le tre leggi fondamentali del moto planetario. Keplero affermava:

1 - I pianeti si muovono intorno al Sole lungo orbite ellittiche, con il sole in uno dei fuochi.
2 - L'area spazzata da un segmento tracciato dal Sole all'orbita è proporzionale al tempo impiegato a percorrerla.
3 - Pianeti diversi hanno periodi di rivoluzione che stanno ai rispettivi assi maggiori in un rapporto esponenziale pari a 3/2.

Nel suo libro Principia, Newton usò la seconda legge di Keplero per dimostrare che l'uguaglianza delle aree in tempi uguali equivale ad affermare che le forze agenti sui pianeti sono dirette verso il Sole. Newton rappresentò l'orbita con una serie di segmenti di moto inerziale, interrotti da bruschi cambiamenti di direzione dovuti all'applicazione della forza del Sole per brevi intervalli di tempo.

Nel primo intervallo di tempo, il pianeta si muoverebbe da *A* fino a *B*, se non ci fosse alcuna forza agente su esso. Nel successivo intervallo di tempo, di uguale durata, il pianeta continuerebbe a muoversi in linea retta per una uguale distanza *Bc*. Un impulso di forza, applicato nel punto *B*, genera una componente del moto diretta verso il Sole, *BV*. Componendo, si ha che il moto effettivo avviene lungo la diagonale *BC*. La stessa procedura si ripete per ogni punto successivo.
Newton dimostra che l'orbita del pianeta spazza aree uguali in tempi uguali. In altre parole, il triangolo *SAB*, spazzato dal pianeta nel primo intervallo di tempo, ha la stessa area del triangolo *SBC*, spazzato nel secondo intervallo e così via.

I due triangoli *SAB* e *SBc*, che formano le due aree, sono uguali, perché hanno le basi uguali e l'altezza relativa in comune.

I due triangoli *SBC* e *SBc* hanno una base in comune e altezze uguali, perché giacciono fra rette parallele. Segue l'uguaglianza dei triangoli *SAB* e *SBC*, cioè: ***le aree spazzate in tempi uguali sono uguali.***
Applicando la stessa analisi a intervalli di tempo sempre più brevi, si ottiene una traiettoria *ABCD*..., prossima quanto si vuole ad una curva piana, su cui sia l'inerzia che l'attrazione del Sole agiscono con continuità, producendo un moto orbitale in cui le aree spazzate in tempi uguali sono uguali. Questo risultato è stato ottenuto assumendo che le variazioni di velocità, vale a dire le forze, siano dirette verso il sole.

Si dimostra poi facilmente, usando la terza legge di Keplero, che variazioni di velocità (forze) così dirette devono variare come l'inverso del quadrato della distanza. Supponiamo che l'orbita sia semplicemente una circonferenza di raggio *R*. Allora il diagramma di Newton avrebbe questo aspetto:

La figura è un poligono regolare, con lati e angoli uguali fra loro, inscritto in una circonferenza che rappresenta l'orbita reale. A destra abbiamo disegnato il relativo diagramma delle velocità, nel quale le variazioni di velocità *Δv* risultano formare un poligono regolare simile al precedente, ma ruotato di 90°. Se si prendono intervalli di tempo sempre più brevi, i due diagrammi tendono alla circonferenza, come nelle due figure seguenti:

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} \qquad \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi v}{T}$$

Essendo la forza *F* proporzionale a $2\pi v/T$ e la velocità *v* uguale a $2\pi R/T$, scriviamo:

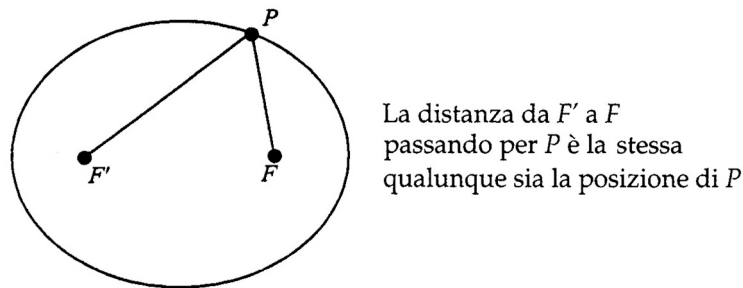
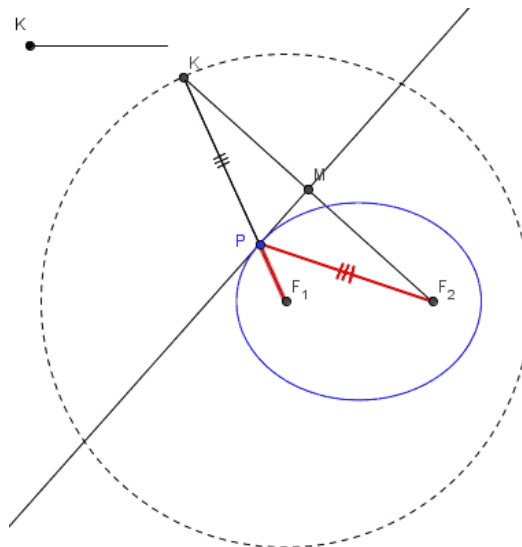
$$F \sim 2\pi v/T = (2\pi/T)\cdot(2\pi R/T) = 4\pi^2 R/T^2$$

ed essendo, per la terza legge di Keplero: $T \sim R^{3/2}$ e quindi $T^2 \sim (R^{3/2})^2 = R^3$, si ha:

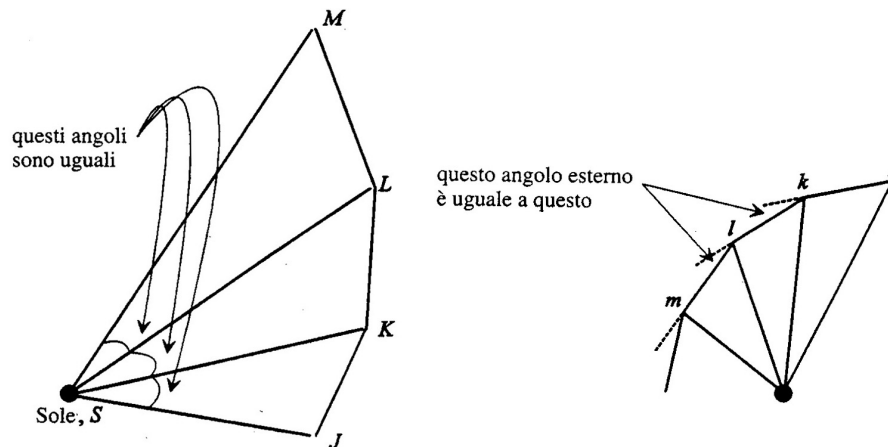
$$F \sim R/T^2 \sim R/R^3 = 1/R^2$$

cioè, ***la forza è proporzionale all'inverso del quadrato della distanza dal Sole.***

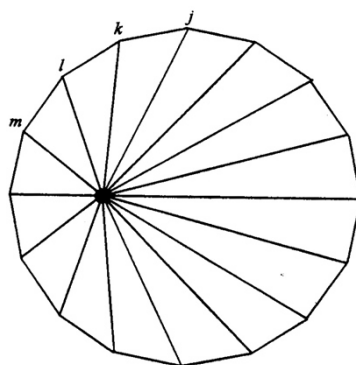
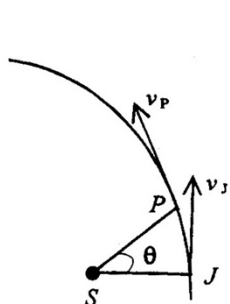
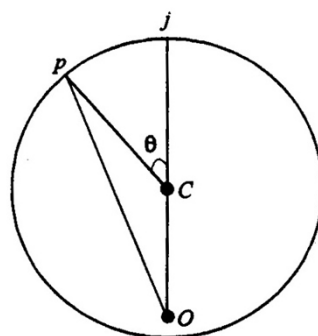
Sappiamo quindi che la forza di gravità esercitata dal Sole su un pianeta è diretta verso il Sole e che la sua intensità decresce come l'inverso del quadrato della distanza dal Sole. Per determinare ciò, Newton ha fatto uso della seconda e della terza legge di Keplero. Il risultato finale, e il trionfo di Newton, è stato quello di dimostrare che una tale forza di gravità, operante nel rispetto delle sue leggi, conduce a *orbite ellittiche* per tutti i pianeti. Nel seguito dimostreremo questo fatto, mettendo da parte i *Principia* (2), ma seguendo un ragionamento geometrico-dinamico più semplice, dovuto al premio Nobel Richard Feynman.

Prima di proseguire, è utile qui ricordare la definizione geometrica dell'ellisse come: *luogo geometrico dei punti del piano per i quali la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi rimane costante.*

Di importanza centrale, nella dimostrazione di Feynman, è il seguente diagramma animato (che ho trovato su *Wikipedia)* che descrive la costruzione geometrica dell'ellisse col *metodo della tangente*:

(2) La dimostrazione di Newton è questa (si tratta della parte conclusiva, da completare con le proposizioni i lemmi ed i corollari citati).

Il contributo di Feynman è consistito essenzialmente, come vedremo, nell'avere individuato, in questa figura, le opportune corrispondenze fra gli elementi geometrici e quelli meccanici del nostro problema.

Feynman ridisegna l'orbita con la sequenza dei punti *J, K, L, M, N,* che non corrispondono più a istanti separati da uguali intervalli di tempo, come nel diagramma di Newton, ma piuttosto a uguali angoli di inclinazione rispetto alla posizione di partenza.

Angoli uguali vogliono dire che le aree dei tiangoli non sono uguali, ma che sono proporzionali al quadrato della distanza dal Sole [presi due triangoli qualsiasi, questi risultano simili (3), per cui le loro aree stanno fra loro come i quadrati delle rispettive dimensioni]. Quindi, dal momento che le aree sono proporzionali ai tempi, i tempi necessari a descrivere questi angoli uguali sono proporzionali al quadrato della distanza. Ora, poichè le variazioni di velocità in tempi uguali risultano inversamente proporzionali al quadrato della distanza dal Sole, prendendo tempi proporzionali al quadrato della di distanza (angoli uguali) si ottengono variazioni di velocità tutte uguali.

Analogamente a quanto fatto sopra, abbiamo inserito nella figura precedente il diagramma delle velocità, nel quale per costruzione risultano: *jk* parallelo a *KS*, *kl* parallelo a *LS*, *lm* parallelo a*MS*, *jk* = *kl* = *lm*, e gli angoli esterni fra questi ultimi sono uguali. Il diagramma completo delle velocità è un poligono regolare, con l'origine in posizione eccentrica.

(3) Questa affermazione è evidentemente vera per una suddivisione in angoli *al Sole* infinitesimi, cioè al limite in cui la traiettoria diventa una curva ed i triangoli sono tutti *isosceli* con angoli corrispondenti uguali.

Dividendo l'orbita in un numero sempre più elevato di segmenti, il diagramma delle velocità si avvicina sempre più ad una circonferenza, con l'origine delle velocità in posizione eccentrica. A questo punto Feynman traccia i due diagrammi seguenti:

(diagramma dell'orbita) (diagramma delle velocità)

Sul diagramma dell'orbita, le velocità v_j e v_p sono tangenti alla curva nei punti J e P. Il diagramma delle velocità sarà una circonferenza, con l'origine eccentrica. Il punto J sul diagramma di Feynman è anche il punto più vicino al Sole, dove la velocità orbitale ha il valore più elevato. Il segmento che rappresenta v_j deve quindi passare per il centro della circonferenza, perché deve risultare il più lungo nel diagramma delle velocità. La velocità v_p è un segmento dall'origine O parallelo a $v_{p.}$ Gli angoli *JSP* e *jCp* sono uguali a θ, perché i due diagrammi sono divisi nello stesso numero di angoli uguali. Così ad ogni angolo θ conosciamo la direzione della tangente all'orbita che cerchiamo di costruire.

Stabilite così tutte le corrispondenze tra i due diagrammi, Feynman passa alla costruzione dell'orbita, utilizzando il diagramma delle velocità. Per fare questo ruota il diagramma delle velocità di 90°, nel modo seguente:

Ora le due orbite, quella a sinistra nella figura e quella da costruire sul diagramma delle velocità, risultano orientate allo stesso modo. In particolare, risultano ugualmente orientate: la direzione del segmento che unisce il Sole al punto *P*, e la direzione della tangente all'orbita in tale punto.
Per ottenere l'orbita, tracciamo l'asse del segmento *Op* che risulterà ora parallelo alla velocità v_p, tangente all'orbita nel punto *P*:

Ma del punto *P* conosciamo la direzione della retta di appartenenza, cioè la direzione del segmento *Cp*. Perciò l'intersezione dell'asse tracciato prima con *Cp*, godrebbe di tutte le proprieta (direzionali) del punto orbitale *P* in costruzione, per cui:

Ma questa costruzione è proprio quella che abbiamo mostrato nella precedente animazione, cioè la costruzione geometrica dell'ellisse col metodo della tangente. Perciò possiamo affermare di aver realizzato la *forma* dell'orbita che cercavamo, dimostrando che: ***la forza di gravità, agente nel rispetto delle leggi di Newton, genera orbite ellittiche per tutti i pianeti.***

Origini della dimostrazione di Feynman

La dimostrazione di Feynman non è nuova, essa apparve nel libro Matter and Motion, di James Clerk Maxwell, pubblicato nel 1877. Maxwell attribuì la dimostrazione a Sir William Hamilton, che fu il primo a fare uso del diagramma delle velocità (da lui chiamato odografo) per studiare il moto di un corpo. Leggete le seguenti due pagine estratte dal suddetto libro di Maxwell e giudicate voi stessi.

108

133. KEPLER'S SECOND LAW

Law II.—The orbit of a planet with respect to the sun is an ellipse, the sun being in one of the foci.

Let $APQB$ (fig. 16) be the elliptic orbit. Let S be the sun in one focus, and let H be the other focus. Produce SP to U, so that SU is equal to the transverse axis AB, and join HU, then HU will be proportional and perpendicular to the velocity at P.

Fig. 16.

For bisect HU in Z and join ZP; ZP will be a tangent to the ellipse at P; let SY be a perpendicular from S on this tangent.

If v is the velocity at P, and h twice the area swept out in unit of time, $h = vSY$.

Also if b is half the conjugate axis of the ellipse

$$SY.HZ = b^2.$$

Now $$HU = 2HZ;$$

hence $$v = \frac{1}{2}\frac{h}{b^2}HU.$$

Hence HU is always proportional to the velocity, and it is perpendicular to its direction. Now SU is always equal to AB. Hence the circle whose centre is S and radius AB is the hodograph of the planet, H being the origin of the hodograph.

The corresponding points of the orbit and the hodo-

109

graph are those which lie in the same straight line through S.

Thus P corresponds to U and Q to V.

The velocity communicated to the body during its passage from P to Q is represented by the geometrical difference between the vectors HU and HV, that is, by the line UV, and it is perpendicular to this arc of the circle, and is therefore, as we have already proved, directed towards S.

If PQ is the arc described in [a very small] time, then UV represents the acceleration [of velocity in that time;] and since UV is on a circle whose centre is S, UV will be a measure of the angular [movement in that time] of the planet about S. Hence the acceleration is proportional to the angular velocity, and this by Art. 129 is inversely as the square of the distance SP. Hence the acceleration of the planet is in the direction of the sun, and is inversely as the square of the distance from the sun.

This, therefore, is the law according to which the attraction of the sun on a planet varies as the planet moves in its orbit and alters its distance from the sun.

Vi propongo infine una bellissima lettura, tratta dal testo divulgativo di Voltaire: *Eléments de la philosophie de Newton,* cap. XX e XXII.

Dimostrazione delle leggi della Gravità ricavate dalle regole di Keplero.

Keplero trovò una regola ammirabile, della quale darò un esempio prima di darne la definizione, per rendere la cosa più agevole.

Giove ha quattro satelliti, che girano intorno ad esso; il più vicino è distante 2 diametri di Giove e 5/6, e fà il suo giro in 42 ore; l'ultimo gira intorno a Giove in 402 ore; si vuol sapere quanto sia distante quest'ultimo satellite dal centro di Giove. Per determinarlo uso questa proporzione: come il quadrato di 42 ore, periodo del primo satellite, sta al quadrato di 402 ore, periodo dell'ultimo satellite, così il cubo di 2 diametri e 5/6 sta ad un quarto termine. Trovato questo quarto termine, se ne estrae la radice cubica, che risulta essere 12 e 2/3, per cui il quarto satellite dista dal centro di Giove 12 diametri e 2/3 di questo pianeta.

Mi servo della stessa regola per tutti i pianeti che girano intorno al Sole. Venere compie il suo giro in 124 giorni, e la Terra in 365; la Terra è lontana dal Sole 30.000.000 di leghe; quante ne sarà lontana Venere? Pertanto dico: come il quadrato dell'anno della Terra, sta al quadrato dell'anno di Venere, così il cubo della distanza media della Terra dal Sole starà ad un quarto termine, la cui radice cubica, che risulta di circa 21.700.000 leghe, è la distanza media di Venere dal Sole. Altrettanto dicasi della Terra, di Saturno, ecc.

La legge pertanto è questa: *il quadrato del periodo di un pianeta sta al quadrato dei periodi degli altri pianeti, come il cubo della sua distanza sta al cubo delle distanze degli altri dal centro comune.*

Keplero trovò questa proporzione, ma non riuscì a trovarne la ragione. Egli era tanto ammirabile in Astronomia, quanto poco esperto in Filosofia. Nel lib. 4 del suo Compendio dice: " Il Sole ha un anima, non intelligente, ma vegetativa ed attiva; egli, ruotando intorno a se medesimo, attira a se i pianeti, i quali però non cadono in esso, perché essi ruotano ciascuno intorno al proprio asse, presentando al sole ora un emisfero amico, ed ora l'altro emisfero nemico; quello viene attratto e questo respinto, d'onde risulta il percorso annuo dei pianeti su ellissi ".

Con questo ragionamento poco filosofico, Keplero concludeva che il Sole dovesse girare intorno al proprio asse. L'errore lo condusse per caso alla verità: egli indovinò la rotazione del Sole quindici anni prima che Galileo lo scoprisse per mezzo del telescopio. Keplero aggiungeva inoltre, nel suo Compendio, che la massa del Sole, la massa di tutto l'Etere e la massa della sfera delle stelle fisse, sono perfettamente uguali.

Non bisogna stupirsi se talvolta si leggono sogni così stravaganti in compagnia di verità così sublimi. Vi sarà taluno, eccellente nei calcoli e nelle osservazioni, il quale alcune volte si serve male della sua ragione. Certi ingegni hanno bisogno di appoggiarsi alla Geometria, e cadono subito se pretendono di camminare da soli. Non

c'è da meravigliarsi quindi che Keplero abbia scoperto quelle leggi dell'Astronomia e ne abbia ignorato le ragioni.

La ragione vera è che la forza centripeta è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro del moto, verso cui si dirigono le forze; cioè, la legge di gravità è tale che un corpo, che è tre volte più vicino al centro del suo moto, gravita 9 volte di più; se ne è tre volte più lontano, graviterà 9 volte di meno; e se se ne discosta 100 volte di più, graviterà 10.000 volte meno.

Pertanto, un corpo che si muove circolarmente intorno ad un centro, in ragione inversa del quadrato della distanza da esso, come pure in ragione diretta della sua massa, la gravità lo fa girare intorno al centro, in modo che, senza di essa egli se ne discosterebbe descrivendo una tangente; dunque la gravità opererà piu fortemente su un corpo mobile che gira più veloce intorno al centro, e quanto più lontano il corpo sarà, tanto più lentamente girerà, perché peserà assai meno.

Per questa ragione la Terra, pur essendo 1170 volte più piccola di Giove, gravita nel Sole solo 8 volte meno di Giove; ciò accade per la proporzionalità diretta delle masse ed inversa dei quadrati delle distanze dal Sole.

La legge di Gravità, in ragione inversa del quadrato delle distanze, è dimostrata:

1. dall'orbita descritta dalla Luna e dalla sua lontananza dalla Terra che ne è il centro;
2. dalla via che ciascun pianeta percorre intorno al Sole su una ellissi;
3. dal confronto delle distanze e delle rivoluzioni di tutti i pianeti intorno al loro centro comune.

Giova osservare che, questa regola di Keplero, che conferma la scoperta di Newton della gravitazione, favorisce altresì il sistema Copernicano. Si può dire che Keplero, con questa sola regola, ha dimostrato ciò che era stato trovato prima di lui, ed ha fatto strada alle verità che un giorno si dovevano scoprire. Si dimostra che, senza la legge delle forze centripete la legge di Keplero sarebbe impossibile. Inoltre, se il Sole girasse intorno alla Terra, si avrebbe che: come la rivoluzione della Luna intorno alla Terra nel corso di un mese, sta alla rivoluzione del Sole intorno allaTerra, nel corso di un anno, così la radice quadrata del cubo della distanza della Luna dalla Terra, sta alla radice quadrata del cubo della distanza del Sole dalla Terra. Con questo calcolo si avrebbe che il Sole non dista da noi più di 510.000 leghe, quando si sa che è lontano almeno 30.000.000 di leghe.

Dalla stessa regola, con analogo ragionamento, si otterrebbe che: se la Terra fosse il centro del moto del Sole, come lo è del moto della Luna, la rivoluzione del Sole avverrebbe in 475 anni. Infatti, essendo la distanza media del Sole dalla Terra, 337 volte la distanza media della Luna dalla Terra, si avrebbe che: il cubo di 1 sta al cubo di 337, come il quadrato di 28, che è la rivoluzione periodica della Luna, starà ad un quarto numero; per cui si troverebbe che il Sole, invece di un anno, impiegherebbe 475 anni per girare intorno alla Terra.

Dalle leggi di Keplero e di Newton, resta dunque provato che, ogni pianeta gravita verso il Sole, centro delle orbite che essi descrivono. Queste leggi valgono per i satelliti di Giove rispetto a Giove, che ne è il centro, per le lune di Saturno rispetto a Saturno, e per la nostra Luna rispetto a noi. Tutti questi pianeti secondari, che girano

intorno al loro pianeta centrale, gravitano altresì, con esso, verso il Sole; così la Luna, trascinata attorno alla Terra dalla forza centripeta, viene allo stesso tempo attratta dal Sole, intorno al quale pure essa fà la sua rivoluzione. Non vi sono variazioni, lungo il percorso della Luna, sia nelle distanze dalla Terra, sia nella forma della sua orbita, che imita ora l'ellisse, ora il cerchio, che non siano dovute alla gravitazione, in ragione dei cambiamenti della sua distanza dalla Terra e della sua distanza dal Sole.

La Luna non percorre esattamente, nella sua orbita, aree uguali in tempi uguali. Newton ha calcolato tutti i casi in cui si incontra questa ineguaglianza: tutti dipendono dall'attrazione del Sole. Il Sole attrae questi due corpi in ragione diretta delle loro masse ed inversa del quadrato delle loro distanze, con l'effetto di queste due forze combinate insieme.

Nuove prove e nuovi effetti della gravitazione: essa è una forza che risiede in ciascuna parte della materia. Scoperte che dipendono da questo principio.

La gravitazione è la causa prima del moto dei pianeti, della caduta di tutti i corpi e del peso che sentiamo in essi. Questa forza di attrazione non è, né può essere, la semplice capacità che ha un corpo di chiamarne a sè un altro: noi la consideriamo come una forza dalla quale risulta il moto intorno ad un centro; essa fà che il Sole graviti verso il centro dei pianeti, come i pianeti gravitano verso il Sole, e che la Luna attragga la Terra, come la Terra attrae la Luna.

Una dimostrazione di questa verità, risiede in una delle leggi primarie del moto. Questa legge dice che la reazione è uguale all'azione, per cui, se il Sole gravita sui pianeti, questi gravitano su di esso; vedremo nel seguito come si attua questa legge.

Poiché la gravitazione opera necessariamente in ragione diretta della massa, ed essendo il Sole circa 760 volte più grande di tutti i pianeti messi insieme (senza contare i satelliti di Giove, l'anello e le lune di Saturno) bisogna che il Sole sia il centro della loro gravitazione, e che perciò tutti i pianeti girino intorno ad esso.

Osserviamo che, quando diciamo che la forza di gravità opera in ragione diretta delle masse, vogliamo significare che essa opera sopra un corpo tanto più, quanto questo ha più parti; lo abbiamo dimostrato facendo vedere che, nella macchina pneumatica, estrattane l'aria, una pagliuzza cade con uguale celerità di una libbra d'oro. Abbiamo detto (trascurando la resistenza dell'aria) che una palla di piombo discende sulla Terra di 15 piedi in un secondo, ed abbiamo dimostrato che la stessa palla, se fosse distante dalla Terra 60 semidiametri terrestri, come lo è la Luna, discenderebbe di 15 piedi in un minuto. Quindi, la forza della Terra sulla Luna sta alla forza che avrebbe su una palla di piombo posta all'altezza della Luna, come la massa solida della Luna sta alla massa della stessa palla. Il Sole opera in questa stessa proporzione su tutti i pianeti: egli attrae Giove, Saturno e i loro satelliti, in ragione diretta della massa solida di Giove, di Saturno e dei loro satelliti.

Quindi, la gravitazione non è solo nella massa totale di ciascun pianeta, ma anche in ciascuna parte di quella massa, perciò: ogni atomo di materia è dotato di questa proprietà.

Esporrò la maniera più semplice con cui Newton ha dimostrato che la gravità risiede ugualmente in ogni atomo. Se tutte le parti di un corpo non avessero ugualmente questa proprietà, ve ne sarebbero alcune più deboli ed altre più forti; un pianeta, ruotando intorno al proprio asse, presenterebbe a distanza uguale ora le parti più deboli ed ora le più forti, per cui i corpi medesimi, in tutte le occasioni possibili, avrebbero ad una stessa distanza, ora un grado di gravitazione, ora un altro; così, la legge della ragione inversa dei quadrati delle distanze, come pure la legge di Keplero, verrebbero continuamente trasgredite; poiché ciò non accade, possiamo dire che nei pianeti non c'è parte alcuna che graviti meno di un altra.

Eccovi un'altra dimostrazione. Se questa proprietà fosse differente in certi corpi, nella macchina pneumatica alcuni corpi cadrebbero più lentamente o più velocemente di altri; ora, tutti i corpi vi cadono nel medesimo tempo, tutti i pendoli di uguale lunghezza fanno nell'aria le loro oscillazioni in tempi uguali, siano essi d'oro, d'agento, di ferro, di acero o di vetro; dunque, tutti i corpi gravitano nel medesimo grado secondo le loro masse, in maniera che la gravitazione operi come 100 su 100 atomi e come 10 su 10 atomi.

Andando di verità in verità, si giunge gradualmente a conclusioni che non sembravano alla portata dello spirito umano.

Newton, con le sole leggi della gravitazione, ha calcolato il peso dei corpi celesti, ed ha previsto quanto un corpo, che quaggiù pesa una libbra, debba pesare sulla Luna, o su Saturno.

E' cosa facile conoscere la grandezza di un corpo celeste quando se ne conosca il diametro, ma nota questa, non per questo se ne conosce la massa, cioè la quantità di materia in esso contenuta, cosa che non si può sapere con altro mezzo che non sia la meravigliosa scoperta delle leggi della gravitazione.

1. Quando si dice *densità*, ovvero *quantità di materia*, in un corpo, si suppone che la materia del corpo sia omogenea, cioè che ogni piede cubico della suddetta materia sia ugualmente pesante.

2. Ogni corpo attrae in ragione diretta della sua massa, perciò, in circostanze uguali, un corpo che abbia 10 volte più massa, attrarrà 10 volte più di quanto, a distanza uguale, attragga un corpo 10 volte meno massiccio.

3. Bisogna tener conto della grandezza, ossia la circonferenza del corpo celeste, perché tanto essa è maggiore, tanto cresce la distanza dal centro, e l'attrazione è in ragione inversa del quadrato di questa distanza. Per esempio, se il diametro del pianeta A è quattro volte maggiore del diametro del pianeta B, ed entrambi hanno ugual quantità di materia, il pianeta A attrarrà sedici volte meno un corpo posto sulla sua superficie, di quanto lo attrarrebbe il pianeta B, e se il corpo pesasse una libbra sul pianeta A, ne peserebbe sedici sul pianeta B.

4. Si deve sapere in quanto tempo i satelliti di un corpo celeste, del quale si voglia conoscere la densità, facciano il loro giro di rivoluzione intorno al esso; poiché, come abbiamo visto, ogni corpo che gira intorno ad un altro, tanto più gravita, quanto più

velocemente gira; ora, egli non gravita di più se non per una di queste due ragioni: o perché è più vicino al centro, o perché questo centro che lo attrae contiene più materia. Se pertanto si vuole conoscere la densità del Sole, rispetto alla densità della Terra, bisogna confrontare il tempo periodico di un pianeta come Venere, intorno al Sole, con il periodo della Luna intorno alla Terra, e la distanza di Venere dal Sole, con la distanza della Luna dalla Terra.

5. Ecco il procedimento: la quantità di materia nel Sole sta alla quantità di materia nella Terra, come il cubo della distanza di Venere dal centro del Sole, sta al cubo della distanza della Luna dal centro della Terra (supponendo che la distanza di Venere dal Sole sia 257 volte maggiore della distanza della Luna dalla Terra); ed ancora in ragione reciproca del quadrato del tempo periodico di Venere intorno al Sole, al quadrato del tempo periodico della Luna intorno alla Terra. Fatta questa operazione, supposto che la grandezza del Sole stia a quella della Terra, come 1.000.000 sta a 1, si troverà che il Sole, pur essendo 1.000.000 di volte più grande della Terra, non ha che circa 250.000 volte più materia.

Inoltre, se volessi sapere in quale ragione sia la forza di gravità sulla superficie del Sole, alla forza di gravità sulla superficie della Terra, cioè a dire quanto pesi sul Sole un corpo che quaggiù pesa una libbra, dovrei dire: queste forze dipendono dalla densità dei corpi celesti e dalla distanza dal centro di essi dei corpi che vi pesano sopra, cioè dai semidiametri del Sole e della Terra; il semidiametro terrestre sta a quello solare come 1 a 100, e la densità della Terra sta a quella del Sole come 4 a 1; dico dunque: come 100, semidiametro del Sole moltiplicato per l'unità, sta a 4, densità della Terra moltiplicata per l'unità, così il peso dei corpi sulla superficie del Sole sta al peso degli stessi corpi sulla superficie della Terra; la ragione di 100 a 4, ridotta ai minimi termini è come 25 a 1, dunque, un corpo che da noi pesa una libbra, sulla superficie del Sole peserebbe 25 libbre.

Non possiamo fare le medesime ricerche per quei pianeti che non hanno lune o satelliti con cui confrontarli; perciò ignoriamo i rapporti di gravitazione tra Mercurio, Marte, Venere e noi, mentre conosciamo i rapporti con gli altri pianeti.